Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: ***магістр***

на тему ***«Неявне лінійне диференціальне рівняння з узагальненим квазіполіномом в правій частині»***

Виконав: студент групи МП-62 VI курсу (другий магістерський рівень), спеціальності 113 “Прикладна математика” освітньо-професійної програми “Прикладна математика” **Олефіренко О.С.**

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики **Півень О.Л.**

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри фундаментальної математики **Гефтер С.Л.**

Харків — 2023 рік

Анотації

Олефіренко О.С. Неявне лінійне диференціальне рівняння з узагальненим квазіполіномом в правій частині

В даній кваліфікаційній роботі було розглянуто неявні лінійні диференціальні рівняння $Ax'(z) + Bx(z) = f(z)$ з регулярним характеристичним жмутком матриць $\lambda A + B$. Було доведено теореми існування та єдиності поліноміальних, квазіполіноміальних розв'язків та розв'язків в класі узагальнених квазіполіномів для даного диференціального рівняння. Наведено приклади, що ілюструють роботу одержаних теорем.

Olefirenko O.S. Implicit linear differential equation with a generalized quasipolynomial on the right-hand side

In this qualification work there were investigated implicit linear differential equations $Ax'(z) + Bx(z) = f(z)$ with a regular characteristic pencil of matrices $\lambda A + B$. The theorems of existence and uniqueness of polynomial, quasi-polynomial solutions and solutions in the class of generalized quasi-polynomials for a given differential equation were proved. Examples illustrating the work of the obtained theorems are given.

Зміст

Вступ

Об'єктом дослідження даної кваліфікаційної роботи є неявне лінійне диференціальне рівняння

$$Ax'(z) + Bx(z) = e^{\gamma z} f(z), \qquad (0.1)$$

де A, B квадратні матриці порядку n, $\gamma \in \mathbb{C}$, $f(z)$ - ціла вектор-функція нульового експоненціального типу. Функцію $e^{\gamma z} f(z)$ було названо узагальненим квазіполіномом [1]. Рівняння (0.1) називають *неявним*, а у випадку необоротності матриці A – *виродженим* [2]. Якщо $A = I$ – одинична матриця, то рівняння (0.1) називається явним.

Метою даної кваліфікаційної роботи є знаходження умов існування та єдиності поліноміальних, квазіполіноміальних та узагальнених квазіполіноміальних розв'язків цього рівняння, при відповідному виборі $f(z)$ в правій частині. Для звичайних диференціальних лінійних рівнянь довільного порядку існування часткового квазіполіноміального розв'язку при квазіполіноміальній неоднорідності це добре відомий факт(див. п.2.3.1 роботи [3]). Цей факт узагальнюється на явне рівняння (0.1) (див., наприклад, наслідок 2.4.52 [3]). Зауважимо, що частковий квазіполіноміальний розв'язок явного диференціального рівняння (0.1) будувався у статті Луценка А.В. за допомогою оберненої матриці Дразіна [4]. В роботі [1] розглядалось явне диференціальне рівняння (0.1), де $e^{\gamma z} f(z)$ – є узагальнений квазіполіном, причому розв'язки представляються у вигляді аналогічного узагальненого квазіполіному. В статті С.Л. Гефтера та Т.Є.Стулової [5] доведено існування та єдиність поліноміального розв'язку неявного рівняння (0.1) у випадку, коли B – одинична матриця, $f(z)$– поліном, а $\gamma = 0$. До цієї ж теореми зводиться випадок, коли B є оборотною матрицею(див. теорему 2.2 даної кваліфікаційної роботи). Існування та єдиність розв'язку (0.1) в класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу доведено в статті С.Л.Гефтера та Т.Є.Стулової у випадку, коли B-одинична матриця та $\gamma = 0$ [6]. Огляд цих результатів наведено в розділі 1 даної кваліфікаційної роботи.

В даній кваліфікаційній роботі досліджується випадок, коли B не обов'язково є оборотною матрицею, проте жмуток $\lambda A + B$ є регулярним, тобто $det(\lambda A+B) \not\equiv 0$ [7]. Показано, що єдиність поліноміального розв'язку рівняння (0.1) має місце тоді та тільки тоді, коли B є оборотною(див. теорему 2.3 даної кваліфікаційної роботи). Крім того, в підрозділі 2.2 досліджується питання існування та єдиності квазіполіноміального розв'язку рівняння (0.1), а також відповідної задачи Коші для цього рівняння (див. теореми 2.6, 2.7). В підрозділі 2.3 розглянуто приклад, що ілюструє роботу теореми 2.7.

В підрозділі 3.1 розглянуто випадок $\gamma = 0$ і доводиться теорема 3.1 існування та єдиності розв'язку рівняння (0.1), а також відповідної задачі Коші в класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу. В підрозділі 3.2 доводиться аналогічна теорема існування та єдиності розв'язку загального рівняння (0.1) в класі узагальнених квазіполіномів. Приклади застосування цих теорем наводяться в підрозділі 3.3.

Розділ 1

Основні поняття та відомі результати

Розглянемо неявне лінійне диференціальне рівняння

$$Hx'(z) + x(z) = p(z), \tag{1.1}$$

де H - матриця $n \times n$, $p(z) = \sum_{j=0}^{m} p_j z^j$, $p_j \in \mathbb{C}^n$, $deg(p(z)) = m$.

В роботі [5, Лема 2.2], доведено наступне твердження:

Теорема 1.1. *[5] Рівняння (1.1) має єдиний поліноміальний розв'язок:*

$$x(z) = \sum_{j=0}^{m} x_j z^j,$$

де

$$x_j = \sum_{k=0}^{m-j} (-1)^k (j+1)(j+2)...(j+k) H^k p_{j+k}, \quad j = 0...m. \tag{1.2}$$

Розв'язок рівняння (1.1) можна зобразити у вигляді

$$x(z) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j H^j \frac{d^j p}{dz^j}(z) \tag{1.3}$$

Розглянемо задачу Коші:

$$x'(z) + Ax(z) = p(z), \tag{1.4}$$

$$x(0) = x_0, \tag{1.5}$$

де A - матриця $n \times n$. З теореми 1.1 випливає наступна теорема.

Теорема 1.2. *Нехай A - оборотна матриця. Тоді рівняння (1.4) має єдиний поліноміальний розв'язок та степінь цього розв'язку дорівнює m. Задача Коші (1.4), (1.5) має поліноміальні розв'язки тоді та тільки тоді, коли*

$$x_0 = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j A^{-j-1} \frac{d^j p}{dz^j}(0) \tag{1.6}$$

Цей розв'язок єдиний.

Доведення: Домножимо рівняння (1.4) на A^{-1} зліва:

$$A^{-1}x' + x = A^{-1}p..$$

За теоремою 1.1 існує єдиний поліноміальний розв'язок цього рівняння:

$$x(z) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j A^{-j-1} \frac{d^j p}{dz^j}(z)$$

Оскільки $deg(A^{-1}p) = m$, то $deg(x) = m$. Таким чином, задача Коші (1.4), (1.5) має поліноміальні розв'язки тоді та тільки тоді, коли x_0 має вигляд (1.6). Цей розв'язок єдиний. Теорему доведено.

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$x'(z) = Ax(z) + f(z), \quad z \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

де A - матриця $n \times n$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$. В роботі [3] доведено наступне твердження:

Теорема 1.3. *[3] Нехай*

$$f(z) = P(z)e^{\gamma z}, \quad z \in \mathbb{R},$$

де P є поліномом з векторними коефіцієнтами, $P(z) \in \mathbb{C}^n, z \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{C}, deg(P) = m$. Тоді існує поліном Q з векторними коефіцієнтами, $Q(z) \in$

$\mathbb{C}^n, z \in \mathbb{R}, deg(Q) \le m + r$, r - кратність кореня γ в мінімальному поліномі матриці A, такий що функція

$$x(z) = Q(z)e^{\gamma z}, z \in \mathbb{R}$$

є розв'язком рівняння (1.7). Якщо γ, коефіцієнти матриці A і полінома P є дійсними, то коефіцієнти полінома Q також є дійсними.

В роботі [8] було введено поняття цілої функції експоненціального типу. Кажуть, що ціла функція $f(z)$ є функцією експоненціального типу, коли границя $\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\ln|f(z)|}{|z|} < \infty$. При цьому експоненціальним типом називають величину $\sigma = \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\ln|f(z)|}{|z|}$. Для цілої вектор-функції $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ експоненціальний тип вводиться наступним чином $\sigma = \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\ln\|f(z)\|}{|z|}$. Вектор-функція $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ є вектор-функцією експоненціального типу, якщо $\sigma < \infty$. Якщо вектор-функція $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j$, де $f_j \in \mathbb{C}^n$, то $\sigma = \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{j!\|f_j\|}$ [9].

В роботі [6, Теорема 1] було доведено теорему про існування та єдиність розв'язку одного неявного лінійного диференціального рівняння нульового експоненціального типу.

Теорема 1.4. *[6] Нехай $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ - ціла вектор-функція нульового експоненціального типу. Тоді диференціальне рівняння $Ax'(z) + x(z) = f(z)$ має єдиний розв'язок в класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу. Цей розв'язок має вигляд*

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k f^{(k)}(z).$$

В роботі [1] було введено наступне поняття узагальненого квазіполінома.

Означення 1.5. [1] Якщо $\gamma \in \mathbb{C}$, то вектор-функцію $g(z) = e^{\gamma z} q(z)$, де

$q:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^n$ – вектор-функція нульового експоненціального типу, називають узагальненим квазіполіномом.

Вектор-функція $q(z)$ і число γ однозначно визначаються добутком $g(z)=e^{\gamma z}q(z)$, якщо $g(z)\not\equiv 0$[1]. Прикладом функції нульового експоненціального типу слугує будь-який поліном. Зокрема, якщо $q(z)$ – поліном, то $e^{\gamma z}q(z)$ – квазіполіном(це і пояснює термін "узагальнений квазіполіном"). В скалярному випадку прикладом цілої функції нульового експоненціального типу є $q(z)=\cos\sqrt{z}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)^n$[8].

В роботі [1] було розглянуто наступну задачу Коші:

$$u'(z)=Au(z)+e^{\gamma z}f(z),\quad z\in\mathbb{C}, \tag{1.8}$$

$$u(0)=b\in\mathbb{C}^n, \tag{1.9}$$

де $e^{\gamma z}f(z)$ - узагальнений квазіполіном. Там використовувався спектральний проектор [10]

$$P_\gamma=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda-\gamma|=\varepsilon}(A-\lambda I)^{-1}d\lambda,$$

де $\varepsilon>0$ було вибрано таким чином, що всі точки $\lambda : 0<|\lambda-\gamma|\le\varepsilon$ не є власними числами матриці A, а I - одинична матриця. Нехай $\sigma(A)$ – спектр матриці A, а $\tilde{X}_\gamma$ є прямою сумою кореневих підпросторів матриці A, які відповідають всім власним значенням цієї матриці, за винятком γ, якщо $\gamma\in\sigma(A)$. Позначимо $\tilde{A}_\gamma$ звуження оператору A на підпростір $\tilde{X}_\gamma$. В роботі [1, Теорема 3.1] було доведено наступну теорему.

Теорема 1.6. *[1] 1) Якщо $\gamma\notin\sigma(A)$, то рівняння (1.8) має єдиний розв'язок, який є узагальненим квазіполіномом виду $e^{\gamma z}q(z)$, де $q(z)$ – ціла вектор-функція нульового експоненціального типу. Цей розв'язок записує-*

ться так:

$$u(z) = -e^{\gamma z} \sum_{n=0}^{\infty} (A - \gamma I)^{-(n+1)} f^{(n)}(z). \tag{1.10}$$

Задача Коші (1.8), (1.9) *має розв'язок зазначеного виду тоді та тільки тоді, коли*

$$b = -\sum_{n=0}^{\infty} (A - \gamma I)^{-(n+1)} f^{(n)}(0). \tag{1.11}$$

2)Якщо точка γ *належить спектру матриці* A *і матриця* $A - \gamma I$ *не є нільпотентною, то задача Коші* (1.8), (1.9) *має розв'язок виду* $e^{\gamma z} q(z)$, *де* $q(z)$ *- ціла вектор-функція нульового експоненціального типу, тоді та тільки тоді, коли*

$$(I - P_\gamma)b = -\sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{A}_\gamma - \gamma I)^{-(n+1)} (I - P_\gamma) f^{(n)}(0). \tag{1.12}$$

При цьому такий розв'язок є єдиним та записується так:

$$u(z) = e^{zA_\gamma} P_\gamma b + \int_0^z e^{\gamma \zeta} e^{(z-\zeta)A_\gamma} P_\gamma f(\zeta) d\zeta - e^{\gamma z} \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{A}_\gamma - \gamma I)^{-(n+1)} (I - P_\gamma) f^{(n)}(z). \tag{1.13}$$

3) Якщо матриця $A - \gamma I$ *є нільпотентною, то при будь-якому* $b \in \mathbb{C}^n$ *задача Коші* (1.8), (1.9) *має єдиний розв'язок, який є узагальненим квазіполіномом виду* $e^{\gamma z} q(z)$, *де* $q(z)$ *- ціла вектор-функція нульового експоненціального типу. Розв'язок записується так:*

$$u(z) = e^{zA} b + \int_0^z e^{\gamma \zeta} e^{(z-\zeta)A} f(\zeta) d\zeta. \tag{1.14}$$

Розділ 2
Поліноміальні та квазіполіноміальні розв'язки неявних лінійних диференціальних рівнянь

2.1. Поліноміальні розв'язки

Наступна теорема показує, що якщо матриця A є нільпотентна, то будь-який розв'язок рівняння (1.4) є поліноміальний.

Теорема 2.1. *Нехай A - нільпотентна матриця, з індексом нільпотентності $ind(A) = k$. Тоді будь-який розв'язок рівняння (1.4) поліноміальний. При будь-якому $x_0 \in \mathbb{C}^n$ задача Коші (1.4), (1.5) має єдиний поліноміальний розв'язок, цей розв'язок має вигляд:*

$$x(z) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left(\frac{z^j}{j!} A^j x_0 + \sum_{l=0}^{m} A^j \frac{d^l p}{dz^l}(0) \frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!} \right).$$

Доведення: За формулою Коші єдиний розв'язок задачі Коші (1.4), (1.5) має вигляд:

$$x(z) = e^{-Az} x_0 + \int_0^z e^{-A(z-\tau)} p(\tau) d\tau. \tag{2.1}$$

Формула (2.18) також дає загальний розв'язок рівняння (1.4). Для доведення теореми достатньо показати, що при будь-якому $x_0 \in \mathbb{C}^n$ функція $x(z)$, яку визначено співвідношенням (2.18) – поліном.

Оскільки $A^k = 0$, то

$$e^{-Az}=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{A^jz^j}{j!}=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{A^jz^j}{j!},$$

$$e^{-Az}x_0=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{z^j}{j!}A^jx_0.$$

З урахуванням формули Тейлора $p(z)=\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{z^j}{j!}\frac{d^jp(0)}{dz^j}$ маємо

$$x(z)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{z^j}{j!}A^jx_0+\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{m}(-1)^jA^j\frac{d^lp}{dz^l}(0)\int_0^z\frac{\tau^l}{l!}\cdot\frac{(z-\tau)^j}{j!}d\tau=$$
$$=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\left(\frac{z^j}{j!}A^jx_0+\sum_{l=0}^{m}A^j\frac{d^lp}{dz^l}(0)\int_0^z\frac{\tau^l}{l!}\cdot\frac{(z-\tau)^j}{j!}d\tau\right)$$

Оскільки

$$\int_0^z\frac{\tau^l}{l!}\cdot\frac{(z-\tau)^j}{j!}d\tau=\frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!},$$

то

$$x(z)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\left(\frac{z^j}{j!}A^jx_0+\sum_{l=0}^{m}A^j\frac{d^lp}{dz^l}(0)\frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!}\right)$$

і ця функція є поліномом. Теорему доведено.

Розглянемо задачу Коші для наступного неявного лінійного диференціального рівняння

$$Ax'(z)+Bx(z)=p(z),\quad z\in\mathbb{R},\tag{2.2}$$

$$x(0)=x_0.\tag{2.3}$$

Тут A, B - матриці $n\times n, p(z)=\sum\limits_{j=0}^{m}p_jz^j$, $p_j\in\mathbb{C}^n$. Матриця A може бути необоротною. З теореми 1.1 випливає наступний результат:

Теорема 2.2. *Нехай $det(B)\neq 0$. Тоді рівняння (2.2) має єдиний поліноміальний розв'язок:*

$$x(z) = \sum_{j=0}^{m} x_j z^j,$$

де

$$x_j = B^{-1}p_j + \sum_{k=1}^{m-j} (-1)^k (j+1)(j+2)...(j+k)(B^{-1}A)^k B^{-1} p_{j+k},$$

Розв'язок рівняння (2.2) *можна зобразити у вигляді*

$$x(z) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j (B^{-1}A)^j B^{-1} \frac{d^j p}{dz^j}(z).$$

Далі ми не будемо припускати, що матриця B є оборотною. Замість цього будемо припускати, що жмуток $\lambda A + B$ є регулярний, тобто $det(\lambda A + B) \not\equiv 0$ [7]. В роботі [2] була введена пара взаємно доповнюючих проекторів

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=\varepsilon} (\lambda A + B)^{-1} A d\lambda = Res_{\lambda=0} (\lambda A + B)^{-1} A, P_2 = I - P_1, \quad (2.4)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=\varepsilon} A(\lambda A + B)^{-1} d\lambda = Res_{\lambda=0} A(\lambda A + B)^{-1}, Q_2 = I - Q_1, \quad (2.5)$$

де I - одинична матриця розміру $n \times n$, а $\varepsilon > 0$ обирається настільки малим, що $det(\lambda A + B) \neq 0$, для всіх λ таких, що $0 < |\lambda| \leq \varepsilon$. Справедливі два розкладання простору $\mathbb{C}^n$ у пряму суму [2]:

$$\mathbb{C}^n = P_1(\mathbb{C}^n) \dot{+} P_2(\mathbb{C}^n) = Q_1(\mathbb{C}^n) \dot{+} Q_2(\mathbb{C}^n),$$

причому

$$A, B : P_k(\mathbb{C}^n) \to Q_k(\mathbb{C}^n), \ k = 1, 2.$$

Тому

$$AP_j = Q_j A, \quad BP_j = Q_j B, \ j = 1, 2 \Rightarrow Q_j A P_i = Q_j B P_i = 0, \ j \neq i \quad (2.6)$$

В [11] було введено наступну матрицю:

$$G = AP_1 + BP_2 = Q_1A + Q_2B \tag{2.7}$$

і доведено існування оберненої матриці G^{-1}. Ця матриця має властивості[11]:

$$G^{-1}Q_1A = P_1, \quad G^{-1}Q_2B = P_2, \tag{2.8}$$

$$H = G^{-1}Q_1B - \text{нільпотентна матриця.} \tag{2.9}$$

Позначимо $S = G^{-1}Q_2A, r = ind(H)$. Справедлива наступна теорема існування та єдиності задачі Коші (2.2), (2.3).

Теорема 2.3. *Нехай $\lambda A + B$ – регулярний жмуток. Тоді рівняння (2.2) має поліноміальний розв'язок. Цей розв'язок єдиний тоді і тільки тоді, коли $det(B) \neq 0$. Задача Коші (2.2), (2.3) має поліноміальний розв'язок тоді та тільки тоді, коли*

$$P_2x_0 = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j S^j G^{-1} Q_2 p^{(j)}(0). \tag{2.10}$$

При виконанні умови (2.10) поліноміальний розв'язок задачі Коші (2.2), (2.3) єдиний та має вигляд:

$$x(z) = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \left(\frac{z^j}{j!} H^j P_1 x_0 + \sum_{l=0}^{m} H^j G^{-1} Q_1 \frac{d^l p}{dz^l}(0) \frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!} \right) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} (-1)^j S^j G^{-1} Q_2 p^{(j)}(z).$$

Доведення: Застосуємо до рівняння (2.2) проектори Q_1 та Q_2 та домножимо на G^{-1} зліва. Отримаємо:

$$G^{-1}Q_1Ax'(z) + G^{-1}Q_1Bx(z) = G^{-1}Q_1p(z), \tag{2.11}$$

$$G^{-1}Q_2Ax'(z) + G^{-1}Q_2Bx(z) = G^{-1}Q_2p(z). \tag{2.12}$$

Користуючись властивостями (2.6) та зображенням

$$x(z) = P_1x(z) + P_2x(z), \tag{2.13}$$

рівняння (2.11), (2.12) перепишемо у наступному вигляді:

$$x_1'(z) + Hx_1(z) = G^{-1}Q_1p(z), \tag{2.14}$$

$$Sx_2'(z) + x_2(z) = G^{-1}Q_2p(z), \tag{2.15}$$

де $x_j(z) = P_jx(z)$, $j = 1, 2$. Початкова умова (2.3) еквівалентна наступним початковим умовам:

$$x_1(0) = P_1x_0, \tag{2.16}$$

$$x_2(0) = P_2x_0. \tag{2.17}$$

Отже, рівняння (2.2) еквівалентно системі рівнянь (2.14), (2.15). А задача Коші (2.2), (2.3) розпадається на дві задачі Коші: (2.14), (2.16) та (2.15), (2.17).

В силу формули Коші єдиний розв'язок задачі Коші (2.14), (2.16) має вигляд:

$$x_1(z) = e^{-Hz}P_1x_0 + \int\limits_0^z e^{-H(z-\tau)}G^{-1}Q_1p(\tau)d\tau \tag{2.18}$$

Формула (2.18) також дає загальний розв'язок рівняння (2.14). Для доведення теореми достатньо показати, що при будь-якому $x_0 \in \mathbb{C}^n$ функція $x_1(z)$, визначена співвідношенням (2.18) - поліном.

Оскільки $H^r = 0$, то

$$e^{-Hz} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{H^jz^j}{j!} = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\frac{H^jz^j}{j!},$$

$$e^{-Hz}x_0 = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \frac{z^j}{j!}H^j x_0.$$

З урахуванням формули Тейлора $p(z) = \sum_{j=0}^{m} \frac{z^j}{j!}\frac{d^j p(0)}{dz^j}$ маємо

$$x_1(z) = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \frac{z^j}{j!}H^j x_0 + \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{m}(-1)^j H^j G^{-1}Q_1 \frac{d^l p}{dz^l}(0)\int_0^z \frac{\tau^l}{l!}\cdot\frac{(z-\tau)^j}{j!}d\tau =$$
$$= \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \left(\frac{z^j}{j!}H^j x_0 + \sum_{l=0}^{m} H^j G^{-1}Q_1 \frac{d^l p}{dz^l}(0)\int_0^z \frac{\tau^l}{l!}\cdot\frac{(z-\tau)^j}{j!}d\tau\right) =$$

Оскільки

$$\int_0^z \frac{\tau^l}{l!}\cdot\frac{(z-\tau)^j}{j!}d\tau = \frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!},$$

то

$$x_1(z) = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \left(\frac{z^j}{j!}H^j P_1 x_0 + \sum_{l=0}^{m} H^j G^{-1}Q_1 \frac{d^l p}{dz^l}(0)\frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!}\right).$$

і ця вектор-функція є поліномом.

Тому будь-який розв'язок рівняння (2.14) – поліноміальний. Задача Коші (2.14), (2.16) має єдиний поліноміальний розв'язок, цей розв'язок має вигляд:

$$x_1(z) = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \left(\frac{z^j}{j!}H^j P_1 x_0 + \sum_{l=0}^{m} H^j G^{-1}Q_1 \frac{d^l p}{dz^l}(0)\frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!}\right).$$

За лемою 2.2 роботи [5] рівняння (2.15) має єдиний поліноміальний розв'язок

$$x_2(z) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j S^j G^{-1} Q_2 p^{(j)}(z).$$

Зауважимо, що рівняння (2.15) еквівалентне рівнянню (2.2) тоді та тільки тоді, коли $P_1(\mathbb{C}^n) = Q_1(\mathbb{C}^n) = 0$. Це означає, що матриця B є оборотною і за теоремою 2.2 рівняння (2.2) має єдиний розв'язок. Задача Коші (2.15), (2.17) має поліноміальні розв'язки тоді та тільки тоді, коли:

$$x_2(0) = P_2 x_0 = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j S^j G^{-1} Q_2 p^{(j)}(0).$$

При цьому розв'язок задачі Коші (2.15), (2.17) єдиний. Таким чином, задача Коші (2.2), (2.3) має єдиний розв'язок:

$$x(z) = x_1(z) + x_2(z) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \left(\frac{z^j}{j!} H^j P_1 x_0 + \sum_{l=0}^{m} H^j G^{-1} Q_1 \frac{d^l p}{dz^l}(0) \frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!} \right) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} (-1)^j S^j G^{-1} Q_2 p^{(j)}(z).$$

Теорему доведено.

2.2. Квазіполіноміальні розв'язки

Розглянемо задачу Коші для неявного лінійного диференціального рівняння

$$A x'(z) + B x(z) = e^{\gamma z} p(z), \tag{2.19}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2.20}$$

де A, B - матриці $n \times n$, $p(z) = \sum_{j=0}^{m} p_j z^j$, $p_j \in \mathbb{C}^n$, $deg(p(z)) = m$.

Лема 2.4. *Нехай $p(z) \not\equiv 0$. Будь-який квазіполіноміальний розв'язок рівняння (2.19) зображається у вигляді: $x(z) = e^{\gamma z} q(z)$, де $q(z) = \sum_{j=0}^{m} q_j z^j$, $q_j \in \mathbb{C}^n$, $deg(p(z)) = m$.*

Доведення: Нехай існує $\beta \neq \gamma$ таке що $x(z) = e^{\beta z} q(z)$ - квазіполіноміальний розв'язок рівняння (2.19). Підставимо $x(z)$ у рівняння (2.19):

$$\beta e^{\beta z} Aq(z) + e^{\beta z} Aq'(z) + Be^{\beta z} q(z) = e^{\gamma t} p(z). \tag{2.21}$$

Домножимо рівняння (2.21) на $e^{-\beta z}$:

$$Aq'(z) + (\beta A + B)q(z) = e^{(\gamma-\beta)z} p(z). \tag{2.22}$$

Ліва частина рівняння (2.19) поліном, отже і права теж має бути поліномом. Доведемо що це не так. Припустимо, що $e^{(\gamma-\beta)t}p(z)$ - поліном. Нехай $\alpha = \gamma - \beta \neq 0$. За формулою Лейбніца:

$$(e^{\alpha z} p(z))^{(k)} = e^{\alpha z} \sum_{j=0}^{k} C_j^k \alpha^{k-j} p^{(j)}(z).$$

Для будь-якого цілого $k \geq 0$ коефіцієнт при z^m дорівнює $e^{\alpha z} \alpha^k p_m \neq 0$, тому похідна k-го порядку вектор-функції $e^{\alpha t} p(z)$ тотожно не дорівнює 0. Отже, $e^{(\gamma-\beta)z} p(z)$ - не поліном. Це суперечить припущенню, тому лему доведено.

Зауваження 2.5. Якщо $p(z) \equiv 0$ та $\det(\lambda_0 A + B) = 0$, рівняння (2.19) має нетривіальний квазіполіноміальний розв'язок у вигляді

$$u(z) = e^{\lambda_0 z} \phi_0,$$

де $0 \neq \phi \in Ker(\lambda_0 A + B)$ [12].

Наступна теорема показує що якщо матриця $B + \gamma A$ оборотна, то рівняння (2.19) має єдиний квазіполіноміальний розв'язок.

Теорема 2.6. *Нехай $det(B + \gamma A) \neq 0$, $p(z) \not\equiv 0$, $deg(p) = m$. Тоді рівняння* (2.19) *має єдиний квазіполіноміальний розв'язок. Цей розв'язок* *має вигляд:*

$$x(z) = e^{\gamma z} q(z) = e^{\gamma z} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j ((\gamma A + B)^{-1} A)^j (\gamma A + B)^{-1} \frac{d^j p}{dz^j}(z).$$

Доведення: З Леми 2.4 випливає, що квазіполіноміальний розв'язок рівняння (2.19) записується в вигляді: $x(z) = e^{\gamma z} q(z)$, $q(z) = \sum_{j=0}^{m} q_j z^j$, $q_j \in \mathbb{C}^n$. Тоді рівняння (2.19) переписується у наступному вигляді:

$$Aq'(z) + (\gamma A + B) q(z) = p(z). \tag{2.23}$$

Для рівняння (2.23) можемо застосувати теорему 2.2. З теореми випливає, що рівняння має єдиний поліноміальний розв'язок:

$$q(z) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j ((\gamma A + B)^{-1} A)^j (\gamma A + B)^{-1} \frac{d^j p}{dz^j}(z),$$

а рівняння (2.19) має єдиний квазіполіноміальний розв'язок:

$$x(z) = e^{\gamma z} q(z) = e^{\gamma z} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j ((\gamma A + B)^{-1} A)^j (\gamma A + B)^{-1} \frac{d^j p}{dz^j}(z)$$

Теорему доведено.

Нехай $\lambda A + B$ - регулярний жмуток та $p_m \neq 0$. В роботі [2] було введено взаємно доповнюючі проектори:

$$P_{1,\gamma} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda - \gamma| = \varepsilon} (\lambda A + B)^{-1} A d\lambda = Res_{\lambda=\gamma} (\lambda A + B)^{-1} A, P_{2,\gamma} = I - P_{1,\gamma}, \tag{2.24}$$

$$Q_{1,\gamma} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda - \gamma| = \varepsilon} A (\lambda A + B)^{-1} d\lambda = Res_{\lambda=\gamma} A (\lambda A + B)^{-1}, Q_{2,\gamma} = I - Q_{1,\gamma}, \tag{2.25}$$

де $\varepsilon > 0$ обирається настільки малим, що $det(\lambda A + B) \neq 0$, для будь якого

λ такого, що $0 < |\lambda - \gamma| \leq \varepsilon$ [2]. Справедливі два розкладання простору $\mathbb{C}^n$ у пряму суму [2]:

$$\mathbb{C}^n = P_{1,\gamma}(\mathbb{C}^n)\dot{+}P_{2,\gamma}(\mathbb{C}^n) = Q_{1,\gamma}(\mathbb{C}^n)\dot{+}Q_{2,\gamma}(\mathbb{C}^n),$$

причому

$$A, B : P_{k,\gamma}(\mathbb{C}^n) \to Q_{k,\gamma}(\mathbb{C}^n),\ \ k = 1, 2.$$

В [11] було введено наступну матрицю :

$$G_\gamma = AP_{1,\gamma} + (\gamma A + B)P_{2,\gamma} = Q_{1,\gamma}A + Q_{2,\gamma}(\gamma A + B) \tag{2.26}$$

та доведено існування оберненої матриці G_γ^{-1}. Ця матриця має наступні властивості:

$$G_\gamma^{-1}Q_{1,\gamma}A = P_{1,\gamma}, \quad G_\gamma^{-1}Q_{2,\gamma}(\gamma A + B) = P_{2,\gamma},$$

$$H_\gamma = G_\gamma^{-1}Q_{1,\gamma}(\gamma A + B) - \text{нільпотентна матриця.} \tag{2.27}$$

Позначимо $S_\gamma = G_\gamma^{-1}Q_{2,\gamma}A, r = ind(H_\gamma)$.

Теорема 2.7. *Нехай жмуток $\lambda A + B$ – регулярний. Тоді рівняння (2.19) має квазіполіноміальний розв'язок. Розв'язок єдиний тоді та тільки тоді, коли $det(\gamma A + B) \neq 0$. Задача Коші (2.19), (2.20) має квазіполіноміальний розв'язок тоді та тільки тоді, коли*

$$P_{2,\gamma}x_0 = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j S_\gamma^j G_\gamma^{-1}Q_{2,\gamma}p^{(j)}(0). \tag{2.28}$$

При виконанні цієї умови задача Коші (2.19), (2.20) має єдиний квазіполіноміальний розв'язок. Цей розв'язок має вигляд:

$$x(z) = e^{\gamma z}\left(\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\left(\frac{z^j}{j!}H_\gamma^j P_{1,\gamma}x_0 + \sum_{l=0}^{m} H_\gamma^j G_\gamma^{-1}Q_{1,\gamma}\frac{d^l p}{dz^l}(0)\frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!}\right) +$$

$$+\sum_{j=0}^{m}(-1)^j S_\gamma^j G_\gamma^{-1} Q_{2,\gamma} p^{(j)}(z). \quad (2.29)$$

Доведення: Розглянемо заміну: $x(z) = e^{\gamma z} q(z)$, $q(z) = \sum_{j=0}^{m} q_j z^j$, $q_j \in \mathbb{C}^n$. З леми 2.4 випливає, що квазіполіноміальних розв'язків іншого вигляду не існує. Підставимо $x(z)$ у рівняння (2.19):

$$\gamma e^{\gamma z} A q(z) + e^{\gamma z} A q'(z) + B e^{\gamma z} q(z) = e^{\gamma z} p(z). \quad (2.30)$$

Домножимо рівняння (2.30) на $e^{-\gamma t}$. Отримаємо:

$$A q'(z) + (\gamma A + B) q(z) = p(z). \quad (2.31)$$

Нехай $L = A, M = \gamma A + B$. Підставимо заміну у (2.31):

$$L q'(z) + M q(z) = p(z). \quad (2.32)$$

Початкова умова для рівняння (2.31) має вигляд:

$$q(0) = x_0. \quad (2.33)$$

З теореми 2.3 випливає, що рівняння (2.31) має поліноміальний розв'язок. Цей розв'язок єдиний тоді та тільки тоді, коли $det(\gamma A + B) \neq 0$. Задача Коші (2.31), (2.33) має поліноміальний розв'язок тоді та тільки тоді, коли

$$P_{2,\gamma} x_0 = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j S^j G_\gamma^{-1} Q_{2,\gamma} p^{(j)}(0). \quad (2.34)$$

При виконання умови (2.34) поліноміальний розв'язок задачі Коші (2.31), (2.33) єдиний та має вигляд:

$$q(z) = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \left(\frac{z^j}{j!}H_\gamma^j P_{1,\gamma}x_0 + \sum_{l=0}^{m} H_\gamma^j G_\gamma^{-1} Q_{1,\gamma}\frac{d^l p}{dz^l}(0)\frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!}\right) + \\ + \sum_{j=0}^{m}(-1)^j S^j G_\gamma^{-1} Q_{2,\gamma} p^{(j)}(z). \quad (2.35)$$

Тоді, $x(z)$ приймає вигляд (2.29). Теорему доведено.

2.3. Приклад

Приклад 2.8. Розглянемо задачу Коші (2.19), (2.20) в якій:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -11 & 9 & 7 \\ 6 & -10 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = -2,$$

$$p(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} z^2.$$

Перевіримо регулярність жмутку $\lambda A + B$:

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} -11-7\lambda & 9+5\lambda & 7+4\lambda \\ 6+3\lambda & -10-\lambda & -2\lambda \\ -5+2\lambda & 7+6\lambda & 1-3\lambda \end{pmatrix}, det(\lambda A + B) = 264\lambda + 132\lambda^2 \not\equiv 0,$$

отже цей жмуток регулярний.

Знайдемо спектральні проектори типу Ріса для жмутку $\lambda A + B$ за формулами (2.4), (2.5):

$$P_{1,\gamma} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda-\gamma|=\varepsilon} (\lambda A + B)^{-1} A d\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{1,\gamma} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda+2|=\varepsilon} A(\lambda A + B)^{-1} d\lambda = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix},$$

$$P_{2,\gamma} = I - P_{1,\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, Q_{2,\gamma} = I - Q_{1,\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{10}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{pmatrix},$$

Використавши властивості (2.26), отримаємо:

$$G_\gamma = AP_{1,\gamma} + (\gamma A + B)P_{2,\gamma} = Q_{1,\gamma}A + Q_{2,\gamma}(\gamma A + B) = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -10 & 3 \\ -11 & -3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$G_\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{71}{264} & \frac{23}{132} & -\frac{35}{264} \\ \frac{49}{264} & \frac{1}{132} & -\frac{13}{264} \\ \frac{29}{66} & \frac{8}{33} & -\frac{5}{66} \end{pmatrix}$$

Тоді, з визначення (2.27)

$$H_\gamma = G_\gamma^{-1} Q_{1,\gamma}(\gamma A + B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_\gamma = G_\gamma^{-1} Q_{2,\gamma} A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

З теореми 2.7 випливає, що задача Коші (2.19), (2.20) має розв'язок у вигляді $x(z) = e^{\gamma z} q(z)$, де $q(z)$ – ціла вектор-функція нульового експоненціального типу, тоді та тільки тоді, коли

$$P_{2,\gamma} x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j S_\gamma^j G_\gamma^{-1} Q_2 p^{(j)}(0) = G_\gamma^{-1} Q_2 p_0 - S_\gamma G_\gamma^{-1} Q_2 p_1 + 2 S_\gamma^2 G_\gamma^{-1} Q_2 p_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} -\frac{73}{528} \\ -\frac{79}{528} \\ \frac{1}{44} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

Нехай $x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{pmatrix}$, тоді умова (2.36) рівносильна

$$\begin{cases} x_{0,2} = x_{0,1} - \frac{1}{88} \\ x_{0,3} = 2x_{0,1} + \frac{79}{264} \end{cases} \tag{2.37}$$

Розв'язок задачі Коші (2.19), (2.20) має вигляд $x(z) = e^{-2z}q(z)$, де

$$q(z) = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\left(\frac{z^j}{j!}H_\gamma^j P_{1,\gamma}x_0 + \sum_{l=0}^{2} H_\gamma^j G_\gamma^{-1}Q_{1,\gamma}\frac{d^l p}{dz^l}(0)\frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!}\right) =$$

$$= P_1x_0 + \sum_{l=0}^{2} G_\gamma^{-1}Q_{1,\gamma}\frac{d^l p}{dz^l}(0)\frac{z^{l+1}}{(l+1)!} + \sum_{j=0}^{m}(-1)^j S_\gamma^j G_\gamma^{-1}Q_{2,\gamma}p^{(j)}(z) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} x_0 + (\frac{z^2}{22} - \frac{4z^3}{66}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} z^2 \right) -$$

$$- \begin{pmatrix} -\frac{5}{528} & \frac{5}{132} & \frac{35}{528} \\ -\frac{1}{176} & \frac{1}{44} & \frac{7}{176} \\ -\frac{1}{132} & \frac{1}{33} & \frac{7}{132} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} z \right) + \begin{pmatrix} -\frac{5}{33} \\ -\frac{1}{11} \\ -\frac{4}{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} x_0 + (\frac{z^2}{22} - \frac{4z^3}{66}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{73}{528} \\ -\frac{79}{528} \\ \frac{1}{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{13}{264} \\ -\frac{7}{88} \\ \frac{17}{66} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \frac{17}{132} \\ -\frac{5}{132} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} z^2$$

Розділ 3
Розв'язки неявних лінійних диференціальних рівнянь у класі квазіполіномів

3.1. Розв'язання неявних лінійних диференціальних рівнянь у класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу

Розглянемо задачу Коші для наступного неявного лінійного диференціального рівняння

$$Ax'(z) + Bx(z) = f(z), \tag{3.1}$$

$$x(0) = x_0. \tag{3.2}$$

Тут A, B - матриці $n \times n, f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ – ціла вектор-функція нульового експоненціального типу. Матриці A та B можуть бути необоротними.

Наведемо теорему існування та єдиності рівняння (3.1) та задачі Коші (3.1), (3.2) у класі цілих вектор-фукнцій нульового експоненціального типу.

Теорема 3.1. *Нехай жмуток $\lambda A + B$ - регулярний. Тоді рівняння (3.1) має розв'язок у класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу. Цей розв'язок єдиний тоді та тільки тоді, коли B– оборотна матриця. Задача Коші (3.1),(3.2) має розв'язок у класі цілих вектор-функцій нульо-*

вого експоненціального типу тоді та тільки тоді, коли

$$P_2 x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j S^j G^{-1} Q_2 f^{(j)}(0) \tag{3.3}$$

Цей розв'язок є єдиним і має вигляд:

$$x(z) = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \left(\frac{z^j}{j!} H^j P_1 x_0 + \sum_{l=0}^{\infty} H^j G^{-1} Q_1 \frac{d^l f}{dz^l}(0) \frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!} \right) + \\ + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j S^j G^{-1} Q_2 f^{(j)}(z) \tag{3.4}$$

Доведення: Застосуємо до рівняння (3.1) проектори Q_1 та Q_2 та домножимо на G^{-1} зліва. Отримаємо:

$$G^{-1} Q_1 A x'(z) + G^{-1} Q_1 B x(z) = G^{-1} Q_1 f(z), \tag{3.5}$$

$$G^{-1} Q_2 A x'(z) + G^{-1} Q_2 B x(z) = G^{-1} Q_2 f(z). \tag{3.6}$$

Користуючись властивостями (2.6) та зображенням

$$x(z) = P_1 x(z) + P_2 x(z), \tag{3.7}$$

рівняння (3.1) перепишемо у наступному вигляді:

$$x_1'(z) + H x_1(z) = G^{-1} Q_1 f(z), \tag{3.8}$$

$$S x_2'(z) + x_2(z) = G^{-1} Q_2 f(z), \tag{3.9}$$

де $u_j(z) = P_j x(z)$, $j = 1, 2$. Початкова умова (3.2) еквівалентна наступним початковим умовам:

$$x_1(0) = P_1 x_0, \tag{3.10}$$

$$x_2(0) = P_2 x_0. \tag{3.11}$$

Отже рівняння (3.1) еквівалентно системі рівнянь (3.8), (3.9). А задача Коші (3.1), (3.2) розпадається на дві задачі Коші: (3.8), (3.10) та (3.9), (3.11).

Оскільки H - нільпотентна матриця індексу r, то за [1, Лема 2.1] існує єдиний розв'язок задачі Коші (3.8), (3.10) в класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу. Більш того, цей розв'язок знаходиться за допомогою формули Коші:

$$x_1(z) = e^{-Hz}P_1x_0 + \int\limits_0^z e^{-H(z-\tau)}G^{-1}Q_1p(\tau)d\tau \tag{3.12}$$

Оскільки $H^r = 0$, то

$$e^{-Hz} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{H^jz^j}{j!} = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\frac{H^jz^j}{j!},$$

$$e^{-Hz}x_0 = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\frac{z^j}{j!}H^jx_0$$

З урахуванням формули Тейлора $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}\frac{d^jf(0)}{dz^j}$ маємо

$$x_1(z) = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\frac{z^j}{j!}H^jx_0 + \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^jH^jG^{-1}Q_1\frac{d^lf}{dz^l}(0)\int_0^z\frac{\tau^l}{l!}\cdot\frac{(z-\tau)^j}{j!}d\tau =$$
$$= \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\left(\frac{z^j}{j!}H^jx_0 + \sum_{l=0}^{\infty}H^jG^{-1}Q_1\frac{d^lf}{dz^l}(0)\int_0^z\frac{\tau^l}{l!}\cdot\frac{(z-\tau)^j}{j!}d\tau\right)$$

Оскільки

$$\int_0^z\frac{\tau^l}{l!}\cdot\frac{(z-\tau)^j}{j!}d\tau = \frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!},$$

то

$$x_1(z) = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\left(\frac{z^j}{j!}H^jP_1x_0 + \sum_{l=0}^{\infty}H^jG^{-1}Q_1\frac{d^lf}{dz^l}(0)\frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!}\right).$$

Зауважимо, що рівняння (3.9) еквівалентне рівнянню (3.1) тоді та тільки тоді, коли $P_1(\mathbb{C}^n) = Q_1(\mathbb{C}^n) = 0$. Це означає, що матриця B є оборотною і за теоремою 2.2 рівняння (3.1) має єдиний розв'язок. За теоремою 1 роботи [5] рівняння (3.9) має єдиний розв'язок у класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу. Тому задача Коші (3.9), (3.11) має розв'язок у класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу тоді та тільки тоді, коли виконується умова (3.3). При виконанні умови (3.3) розв'язок задачі Коші (3.1),(3.2) єдиний та має вигляд:

$$x(z) = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \left(\frac{z^j}{j!} H^j P_1 x_0 + \sum_{l=0}^{\infty} H^j G^{-1} Q_1 \frac{d^l f}{dz^l}(0) \frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!} \right) + \\ + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j S^j G^{-1} Q_2 f^{(j)}(z) \quad (3.13)$$

Теорему доведено.

3.2. Розв'язання неявних лінійних диференціальних рівнянь у класі узагальнених квазіполіномів

Розглянемо задачу Коші для неявного лінійного диференціального рівняння

$$Ax'(z) + Bx(z) = e^{\gamma z} f(z) \quad (3.14)$$

$$x(0) = x_0, \quad (3.15)$$

де A, B - матриці $n \times n$, $f(z)$ - ціла вектор-функція нульового експоненціального типу.

Теорема 3.2. *Нехай жмуток $\lambda A + B$ – регулярний. Тоді рівняння* (3.14) *має розв'язок у вигляді узагальненого квазіполіному* $x(z) = e^{\gamma z}q(z)$, *де* $q(z)$ *ціла вектор-функція нульового експоненціального типу. Розв'язок вказаного вигляду єдиний тоді та тільки тоді, коли* $det(\gamma A + B) \neq 0$. *Задача Коші* (3.14), (3.15) *має розв'язок у вигляді узагальненого квазіполіному* $x(z) = e^{\gamma z}q(z)$, *де* $q(z)$ *ціла вектор-функція нульового експоненціального типу, тоді та тільки тоді, коли*

$$P_{2,\gamma}x_0 = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_\gamma^j G_\gamma^{-1} Q_{2,\gamma} f^{(j)}(0). \tag{3.16}$$

Цей розв'язок єдиний та має вигляд:

$$x(z) = e^{\gamma z}\left(\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\left(\frac{z^j}{j!}H^j P_{1,\gamma}x_0 + \sum_{l=0}^{\infty}H_\gamma^j G_\gamma^{-1}Q_{1,\gamma}\frac{d^l f}{dz^l}(0)\frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!}\right)\right) + \\ + \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_\gamma^j G_\gamma^{-1} Q_{2,\gamma} f^{(j)}(z). \tag{3.17}$$

Доведення: Розглянемо заміну: $x(z) = e^{\gamma z}q(z)$, $q(z)$ - ціла вектор-функція нульового експоненціального типу. Підставимо $x(z)$ у рівняння (3.14):

$$\gamma e^{\gamma z}Aq(z) + e^{\gamma z}Aq'(z) + Be^{\gamma z}q(z) = e^{\gamma z}f(z). \tag{3.18}$$

Домножимо рівняння (3.18) на $e^{-\gamma z}$. Отримаємо:

$$Aq'(z) + (\gamma A + B)q(z) = f(z). \tag{3.19}$$

Початкова умова для рівняння (3.19) має вигляд:

$$q(0) = x_0. \tag{3.20}$$

З теореми 3.1 випливає, що рівняння (3.19) має у класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу розв'язок. Цей розв'язок єдиний тоді та тільки тоді, коли $det(\gamma A+B)\neq 0$. Задача Коші (3.19), (3.20) має розв'язок у класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу тоді та тільки тоді, коли

$$P_{2,\gamma}x_0=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_\gamma^j G_\gamma^{-1}Q_{2,\gamma}f^{(j)}(0). \tag{3.21}$$

При виконання умови (3.21) розв'язок задачі Коші (3.19), (3.20) у класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу єдиний та має вигляд:

$$q(z)=\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\left(\frac{z^j}{j!}H_\gamma^j P_{1,\gamma}x_0+\sum_{l=0}^{\infty}H_\gamma^j G_\gamma^{-1}Q_{1,\gamma}\frac{d^l f}{dz^l}(0)\frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!}\right)+$$
$$+\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_\gamma^j G_\gamma^{-1}Q_{2,\gamma}f^{(j)}(z).$$

Тоді, $x(z)$ приймає вигляд (3.17). Теорему доведено.

3.3. Приклади

Приклад 3.3. Розглянемо задачу Коші (3.1), (3.2), в якій:

$$A=\begin{pmatrix}9&4\\18&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&3\\10&5\end{pmatrix},\ f(z)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k^k k!}z^k\\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k^k k!}z^k\end{pmatrix}.$$

При $k=0$ вважаємо, що $k^k=1$. Функція $f(z)$ є цілою вектор-функцією нульового експоненціального типу. За визначенням

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{k^k k!}\\ \dfrac{1}{k^k k!}\end{pmatrix}z^k. \tag{3.22}$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k!\|c_n\|} = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k!\frac{\sqrt{2}}{k^k k!}} = 0$, функція $f(z)$ є цілою вектор функцією нульового експоненціального типу. Перевіримо регулярність жмутку $\lambda A + B$:

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} 6+9\lambda & 3+4\lambda \\ 10+18\lambda & 5+8\lambda \end{pmatrix}, det(\lambda A + B) = \lambda,$$

отже цей жмуток регулярний.

Знайдемо спектральні проектори типу Ріса для жмутку $\lambda A + B$ за формулами (2.4), (2.5):

$$(\lambda A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-5-8\lambda}{\lambda} & \dfrac{3+4\lambda}{\lambda} \\ \dfrac{10+18\lambda}{\lambda} & \dfrac{-6-9\lambda}{\lambda} \end{pmatrix}, \lambda \neq 0,$$

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=\varepsilon}(\lambda A+B)^{-1}A d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=\varepsilon}\begin{pmatrix} \dfrac{-5-8\lambda}{\lambda} & \dfrac{3+4\lambda}{\lambda} \\ \dfrac{10+18\lambda}{\lambda} & \dfrac{-6-9\lambda}{\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 18 & 8 \end{pmatrix} d\lambda =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -18 & -8 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=\varepsilon}A(\lambda A+B)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=\varepsilon}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 18 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{-5-8\lambda}{\lambda} & \dfrac{3+4\lambda}{\lambda} \\ \dfrac{10+18\lambda}{\lambda} & \dfrac{-6-9\lambda}{\lambda} \end{pmatrix} d\lambda =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -10 & 6 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = I - P_1 = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}, Q_2 = I - Q_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю G користуючись формулою (2.7)

$$G = AP_1 + BP_2 = Q_1A + Q_2B = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ 28 & 13 \end{pmatrix}, G^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & 7 \\ 28 & -15 \end{pmatrix}.$$

Тоді, за формулою (2.9)

$$H = G^{-1}Q_1B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r = ind(H) = 1,$$

$$S = G^{-1}Q_2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З теореми 3.1 випливає, що задача Коші (3.1), (3.2) має розв'язок у класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу тоді та тільки тоді, коли

$$P_2x_0 = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S^j G^{-1} Q_2 f^{(j)}(0) = \begin{pmatrix} -13 & 7 \\ 28 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} f(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 18 & 9 \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Ця рівність справедлива для будь-яких $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ 1-2a \end{pmatrix}$, де a - довільне комплексне число. Отже, для вказаних x_0 задача Коші має розв'язок у класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу. Цей розв'язок єдиний та має вигляд (3.4), причому

$$P_1x(z)=\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\left(\frac{z^j}{j!}H^jP_1x_0+\sum_{l=0}^{\infty}H^jG^{-1}Q_1\frac{d^lf}{dz^l}(0)\frac{z^{l+j+1}}{(l+j+1)!}\right)=$$

$$=P_1x_0+\sum_{l=0}^{\infty}G^{-1}Q_1\frac{d^lf}{dz^l}(0)\frac{z^{l+1}}{(l+1)!}. \quad (3.23)$$

Оскільки $\frac{d^lf}{dz^l}(z)=\sum_{k=l}^{\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{k^k(k-l)!}\\ \frac{1}{k^k(k-l)!}\end{pmatrix}z^{k-l}$, $\frac{d^lf}{dz^l}(0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{l^l}\\ \frac{1}{l^l}\end{pmatrix}$, рівність (3.23) переписується так:

$$P_1x(z)=\begin{pmatrix}9 & 4\\ -18 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ 1-2a\end{pmatrix}+\sum_{l=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-13 & 7\\ 28 & -15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -10 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{l^l}\\ \frac{1}{l^l}\end{pmatrix}\frac{z^{l+1}}{(l+1)!}=$$

$$=\begin{pmatrix}a+4-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{l^l}\frac{z^{l+1}}{(l+1)!}\\ -2a-8+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4}{l^l}\frac{z^{l+1}}{(l+1)!}\end{pmatrix}.$$

Далі

$$P_2x(z)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jS^jG^{-1}Q_2f^{(j)}(z)=G^{-1}Q_2f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-8 & 4\\ 18 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{k^kk!}\\ \frac{1}{k^kk!}\end{pmatrix}z^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\frac{-4}{k^kk!}\\ \frac{9}{k^kk!}\end{pmatrix}z^k.$$

Отже єдиний розв'язок задачі Коші (3.1), (3.2) в класі цілих вектор-функцій нульового експоненціального типу має вигляд

$$x(z) = P_1 u(z) + P_2 u(z) = \begin{pmatrix} a + 4 - \sum\limits_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2}{l^l} \frac{z^{l+1}}{(l+1)!} + \frac{4}{l^l l!} z^l \right) \\ -2a - 8 + \sum\limits_{l=0}^{\infty} \left(\frac{4}{l^l} \frac{z^{l+1}}{(l+1)!} + \frac{9}{l^l l!} z^l \right) \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.4. Розглянемо задачу Коші (3.14), (3.15), в якій:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \gamma = 2, f(z) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k k!} z^k \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k k!} z^k \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k k!} z^k \end{pmatrix}.$$

При $k = 0$ вважаємо, що $k^k = 1$. Перевіримо регулярність жмутку $\lambda A + B$:

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} -1 + 3\lambda & 2 & -1 + 2\lambda \\ 5\lambda & 4 & 3\lambda \\ -3 + 6\lambda & 2 & -3 + 4\lambda \end{pmatrix}, det(\lambda A + B) = 4\lambda - 2\lambda^2 \not\equiv 0,$$

отже цей жмуток регулярний. Обираємо $\varepsilon \in (0, 2)$, тоді згідно з формулами (2.24), (2.25)

$$P_{1,\gamma} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda - \gamma| = \varepsilon} (\lambda A + B)^{-1} A d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda - 2| = \varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{12 - 10\lambda}{-4\lambda + 2\lambda^2} & \frac{-4 + 4\lambda}{-4\lambda + 2\lambda^2} & \frac{-4 + 2\lambda}{-4\lambda + 2\lambda^2} \\ \frac{-6\lambda + 2\lambda^2}{-4\lambda + 2\lambda^2} & -\frac{\lambda}{-4\lambda + 2\lambda^2} & \frac{2\lambda - \lambda^2}{-4\lambda + 2\lambda^2} \\ \frac{-12 + 14\lambda}{-4\lambda + 2\lambda^2} & \frac{4 - 6\lambda}{-4\lambda + 2\lambda^2} & \frac{4 - 2\lambda}{-4\lambda + 2\lambda^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} d\lambda =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q_{1,\gamma} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda-2|=\varepsilon} A(\lambda A + B)^{-1} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=\varepsilon} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12-10\lambda}{-4\lambda+2\lambda^2} & \frac{-4+4\lambda}{-4\lambda+2\lambda^2} & \frac{-4+2\lambda}{-4\lambda+2\lambda^2} \\ \frac{-6\lambda+2\lambda^2}{-4\lambda+2\lambda^2} & -\frac{\lambda}{-4\lambda+2\lambda^2} & \frac{2\lambda-\lambda^2}{-4\lambda+2\lambda^2} \\ \frac{-12+14\lambda}{-4\lambda+2\lambda^2} & \frac{4-6\lambda}{-4\lambda+2\lambda^2} & \frac{4-2\lambda}{-4\lambda+2\lambda^2} \end{pmatrix} d\lambda =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{2,\gamma} = I - P_{1,\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, Q_{2,\gamma} = I - Q_{1,\gamma} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

З формули (2.26) випливає, що

$$G_\gamma = AP_{1,\gamma} + (\gamma A + B)P_{2,\gamma} = Q_{1,\gamma}A + Q_{2,\gamma}(\gamma A + B) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 11 & 4 & 7 \\ 11 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$G_\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$H_\gamma = G_\gamma^{-1} Q_{1,\gamma}(\gamma A + B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_\gamma = G_\gamma^{-1} Q_{2,\gamma} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Далі

$$S_\gamma^j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{j-1}} & 0 & \frac{1}{2^j} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2^{j-1}} & 0 & -\frac{1}{2^j} \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

З теореми 3.2 випливає, що задача Коші (3.14), (3.15) має розв'язок у вигляді $x(z) = e^{\gamma z} q(z)$, де $q(z)$ - ціла вектор-функція нульового експоненціального, типу тоді та тільки тоді, коли

$$P_{2,\gamma} x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j S_\gamma^j G_\gamma^{-1} Q_2 f^{(j)}(0) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{j^j} \\ \frac{1}{j^j} \\ \frac{1}{j^j} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2^{j+1} \cdot j^j} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2^{j+1} \cdot j^j} \end{pmatrix}.$$

Остання рівність еквівалентна наступній

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{2} & 1 & \dfrac{1}{2} \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2^{j+1} \cdot j^j} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2^{j+1} \cdot j^j} \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Ця рівність справедлива для будь-яких $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ \dfrac{a}{2} + \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^j}{2^{j+2} \cdot j^j} \\ -2a - \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^j}{2^{j+1} \cdot j^j} \end{pmatrix}$, де a - довільне комплексне число. За теоремою 3.2 розв'язок задачі Коші (3.14), (3.15) у вигляді квазіполіному $x(z) = e^{\gamma z} q(z)$ єдиний і має наступне зображення:

$$x(z) = e^{2z} \left(P_{1\gamma} x_0 + \sum_{l=0}^{\infty} G_\gamma^{-1} Q_{1,\gamma} \frac{d^l f}{dz^l}(0) \frac{z^{l+1}}{(l+1)!} + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j S_\gamma^j G_\gamma^{-1} Q_{2,\gamma} f^{(j)}(z) = \right.$$

$$= e^{2z} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \dfrac{a}{2} + \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^j}{2^{j+2} \cdot j^j} \\ -2a - \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^j}{2^{j+1} \cdot j^j} \end{pmatrix} +$$

$$+e^{2z}\sum_{l=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & \frac{1}{2} & 0\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{l^l}\\ \frac{1}{l^l}\\ \frac{1}{l^l}\end{pmatrix}\frac{z^{l+1}}{(l+1)!}+$$

$$+e^{2z}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{k^k k!}\\ \frac{1}{k^k k!}\\ \frac{1}{k^k k!}\end{pmatrix}z^k+$$

$$+e^{2z}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\begin{pmatrix}-\frac{3}{2^{j+1}} & \frac{1}{2^{j+1}} & \frac{1}{2^{j+1}}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{3}{2^{j+1}} & -\frac{1}{2^{j+1}} & -\frac{1}{2^{j+1}}\end{pmatrix}\sum_{k=j}^{\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{k^k(k-j)!}\\ \frac{1}{k^k(k-j)!}\\ \frac{1}{k^k(k-j)!}\end{pmatrix}z^{k-j}=$$

$$=e^{2z}\begin{pmatrix}a+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2^{j+1}\cdot j^j}\\ \frac{a}{2}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2^{j+2}\cdot j^j}\\ -2a-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2^j\cdot j^j}\end{pmatrix}+e^{2z}\sum_{j=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{1}{j^j}\\ -\frac{1}{2j^j}\\ \frac{2}{j^j}\end{pmatrix}\frac{z^{j+1}}{(j+1)!}+$$

$$+e^{2z}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2k^k k!}\\ \frac{1}{2k^k k!}\\ \frac{1}{2k^k k!}\end{pmatrix}z^k+e^{2z}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\sum_{k=j}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2^{j+1}k^k(k-j)!}\\ 0\\ \frac{1}{2^{j+1}k^k(k-j)!}\end{pmatrix}z^{k-j}.$$

Висновок

В даній кваліфікаційній роботі було наведено умови існування та єдиності поліноміальних, квазіполіноміальних та узагальнених квазіполіноміальних розв'язків та розв'язків в класі узагальнених квазіполіномів для неявниих лінійних диференціальних рівнянь $Ax'(z) + Bx(z) = f(z)$ з регулярним жмутком матриць $\lambda A + B$ і відповідно поліноміальною, квазіполіноміальною та узагальненою квазіполіноміальною вектор-функцією $f(z)$.

Список літератури

[1] Gefter S.L. Piven A.L. *Linear Operator-Differential Equation with Generalized Quasipolynomial on the Right-Hand Side.* J. Math. Sci. 2018. V. 231 (3). P. 338–346.

[2] Rutkas A.G. *Spectral methods for studying degenerate differential-operator equations.* I. J. Math. Sci. 2007. V.144(4). P. 4246–4263.

[3] Фардігола Л.В. *Курс звичайних диференціальних рівнянь.* Київ. Наукова думка, 2022.

[4] Lutsenko A. V. *Application of the Drazin inversion on linear systems of differential equations.* Diff. Equ. 1987. V.23(4). P.719–721.

[5] Gefter S. Stulova T. *On Holomorphic Solutions of Some Implicit Linear Differential Equations in a Banach Space. In: Adamyan V.M. et al. (eds) Modern Analysis and Applications. Operator Theory: Advances and Applications, vol 191. Birkhäuser Basel.* 2009. P.331-340.

[6] Gefter S. Stulova T. *On entire solutions of exponential type for some implicit linear differential-difference equation in a Banach space.* J. Math. Sci. 2014. V.202(4). P.541-545.

[7] Gantmacher F.R. *Matrix Theory.* New York, Chelsea publishing, 1959.

[8] Levin B. Ja. *Distribution of Zeros of Entire Functions.* Amer. Math. Soc. Providence, 1980.

[9] Daleckii Ju. Krein M. *Stability of Differential Equations in Banach Space.* Amer. Math. Soc., Providence, 1974.

[10] Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[11] Vlasenko L.A. *Forced oscillations of an infinite-dimensional oscillator under impulsive perturbations.* Ukr. Math. J. 2008. V.60(2). P.177–190.

[12] Keldysh M.V. *On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators.* Rus. Math. Surveys 1971. V.26(4). P.15-44.